JOSÉ MILCIADEZ DÍAZ, RAFAEL CASTILLO, FERNANDO VEGA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA, DEPARTAMENTO DE FÍSICA

INTRODUCCION AL ANALISIS VECTORIAL

(Parte 1)

Donde encuentre el símbolo …..
conduce a una animación ejemplo.
le lleva a una solución detallada.

Introducción | Parte 2 | Parte 3 | Parte 4

El Análisis Vectorial es excelente herramienta matemática con la cual se expresan en forma más conveniente y se comprenden mejor muchos conceptos de la Física, en particular los conceptos de la teoría electromagnética.

1.- Cantidades escalares y cantidades vectoriales.

En la Física y la Ingeniería tratamos con cantidades físicas que pueden ser medidas. La medición nos dice cuantas veces una cantidad dada (unidad) está contenida en la cantidad medida. Las cantidades físicas más simples son aquellas que quedan completamente especificadas por un simple número y la unidad conocida; estas cantidades se conocen como **cantidades escalares.** El volumen, la densidad, la masa, el tiempo, la temperatura, la distancia, el potencial eléctrico son ejemplos de cantidades escalares. Las cantidades escalares obedecen operaciones aritméticas; ejemplos: $7\,\mathrm{kg}+8\,\mathrm{kg}=15\,\mathrm{kg}$, $8\,\mathrm{m}^3-6\,\mathrm{m}^3=2\,\mathrm{m}^3$; sí el voltaje de A es 15 voltios y el voltaje de B es 7 voltios, la diferencia de voltaje entre A y B será de 8 voltios.

Otro grupo importante de cantidades físicas son aquellas que además de magnitud tienen dirección y se conocen como **cantidades vectoriales**. El desplazamiento es un ejemplo de estas cantidades; cuando decimos "salió de su casa y caminó 2 kilómetros," necesitamos tener en cuenta la dirección si deseamos conocer su posición final; la velocidad, la fuerza, la intensidad de campo eléctrico son otros ejemplos de cantidades vectoriales.

2.- Notación y Definiciones.

Una cantidad vectorial (ó simplemente un vector) suele representarse por una letra con una flecha arriba de ella: $\vec{F},\vec{v}$ podrían representar una fuerza y una velocidad. Al dibujar un vector siempre se traza una flecha, la longitud de la línea representa su magnitud y su dirección es la del vector; en la figura 1 se muestran tres vectores, los $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos, el vector $\vec{C}$ es antiparalelo.

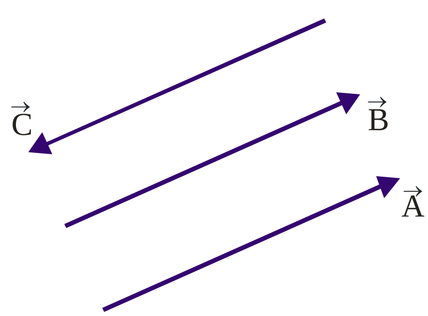


Fig. 1. Vectores paralelos y antiparalelos.

Se dice que dos vectores son iguales sí ellos tienen igual magnitud y la misma dirección, los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de la figura anterior, además de ser paralelos son iguales.
Un vector $-\vec{C}$ tiene la magnitud de $\vec{C}$ pero su dirección es opuesta a la del vector $\vec{C}$, los dos son antiparalelos. Se dice que un vector $\vec{a}$ es nulo sí su magnitud es cero $(a=0)$.

Los vectores $2\vec{A}$, $5\vec{A}$ son paralelos al vector $\vec{A}$ y, en general, sí **m** es un escalar positivo la cantidad $m\vec{A}$ es un vector cuya magnitud es mA y tiene la dirección del vector $\vec{A}$.

En la figura 2 se muestran dos vectores paralelos, un vector $\vec{A}$ cuya magnitud es A y otro vector $\hat{A}$ cuya magnitud es la unidad. La relación entre estos vectores la podemos expresar como $\hat{A}=\frac{\vec{A}}{A}$ ó también que $\vec{A}=A\hat{A}$. El vector $\hat{A}$ recibe el nombre de **vector unitario** y simplemente representa la dirección del vector $\vec{A}$.

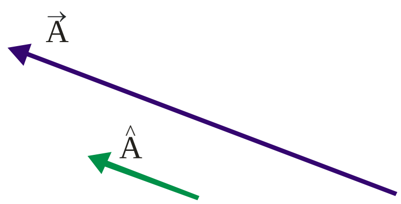
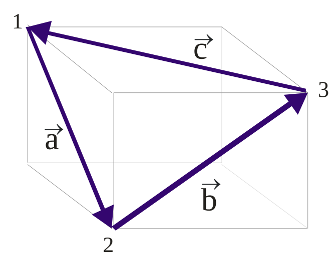


Fig. 2. Vector unitario.

Sí $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son dos vectores no paralelos, y *m* y *n* son dos escalares cualesquiera, la expresión $m\vec{A}+n\vec{B}$ es una función lineal de $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Similarmente, si los vectores $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ no son todos paralelos a un mismo plano, la expresión $l\vec{A}+m\vec{B}+n\vec{C}$ es una función lineal de $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$.

Ejemplo Ilustrativo 2-1. La siguiente figura se muestra un cubo y los desplazamientos de una abeja al cambiar de posiciones 1, 2, 3 y 1. Sí el lado del cubo es 1 m, ¿cuánto vale cada uno de los desplazamientos? ¿Cuál es el desplazamiento total?



La magnitud de $\vec{a}$ es $\sqrt{2}$ y su dirección es de 1 a 2; la magnitud de $\vec{b}$ es $\sqrt{2}$ y su dirección es de 2 a 3; la magnitud de $\vec{c}$ es $\sqrt{2}$ y su dirección es de 3 a 1. El desplazamiento total es cero porque volvió a la posición inicial.

3.- Suma y resta de vectores.

La adición de vectores es una suma geométrica que satisface la ley conmutativa y la ley asociativa. En la figura 3 se presenta un paralelogramo donde se muestra la ley conmutativa $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$ y un polígono donde se ilustra la ley asociativa $\left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\vec{C}=\vec{A}+\left(\vec{B}+\vec{C}\right)$.

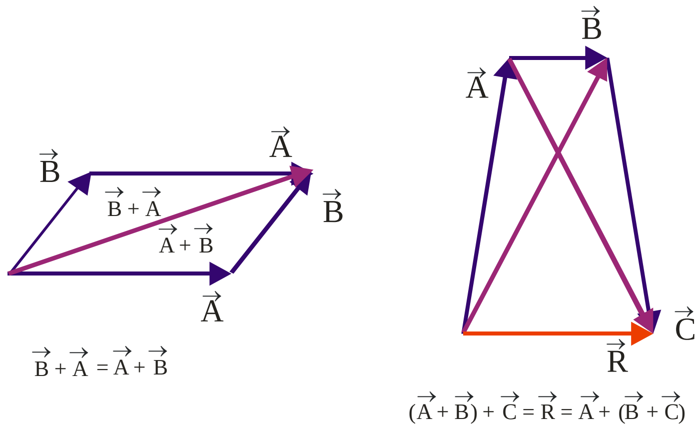
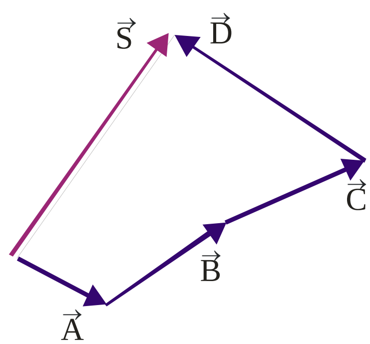


Fig. 3. Suma de vectores.

Para la suma de dos o más vectores, gráficamente, se organizan de tal forma que el comienzo de un vector coincida con el final del anterior y así sucesivamente a través de la línea poligonal que se va formando. El vector que representa la suma de los vectores considerados va desde el inicio del primer vector hasta el final del último vector; este vector suma es igual al negativo del vector que cierra la línea poligonal formada por los vectores que se van a sumar. En la siguiente figura se ilustra la representación gráfica de la suma $\vec{S}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}$.



Cuando los vectores que vamos a sumar forman un polígono (línea poligonal cerrada) decimos que la suma es cero.

Para restar un vector de otro se invierte su dirección y se suma. Así, la diferencia de dos vectores, $\vec{A}-\vec{B}$, está definida por la relación

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+\left(-\vec{B}\right) \tag{3-1}$$

su representación gráfica se muestra en la figura 4.

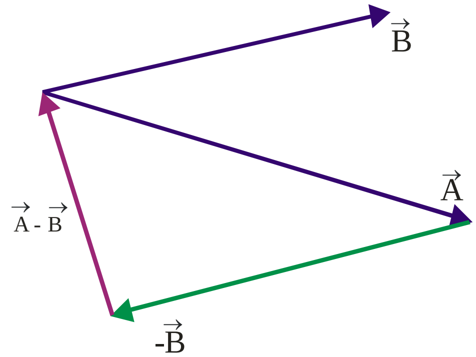
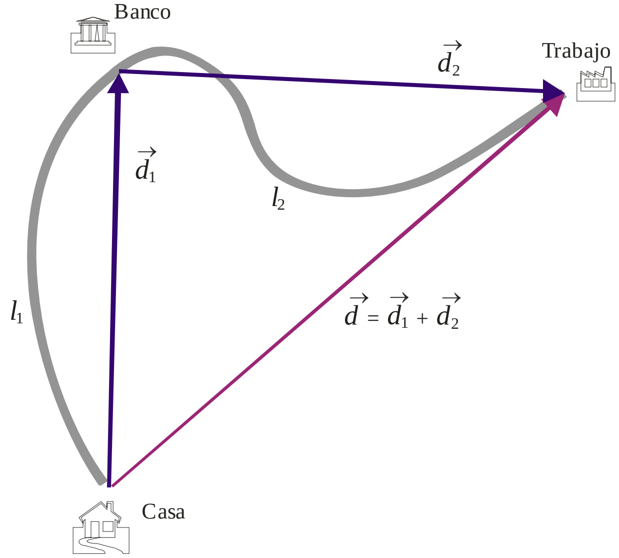


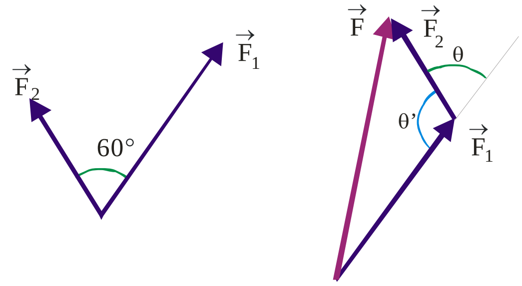
Fig. 4. Resta de vectores.

Ejemplo Ilustrativo 3.1. Desplazamiento y Trayectoria ó Camino Recorrido. Pedro salió de su casa y antes de ir al trabajo pasó por el banco. En este ejemplo se quiere hacer claridad sobre los conceptos de trayectoria y desplazamiento. En la figura se ilustra con línea gris gruesa la trayectoria seguida por Pedro; entre la Casa y el Banco siguió el camino l_1 y entre el Banco y el Trabajo la trayectoria l_2, la trayectoria total ó camino recorrido por Pedro será $l = l_1 + l_2$.



Al desplazarse de la casa al banco, Pedro cambió de posición y este desplazamiento en la figura se representa por $\vec{d}_1$; el cambio de posición del banco al trabajo en la figura se representa por $\vec{d}_2$. El desplazamiento total realizado por Pedro en ir de la casa al trabajo es una cantidad vectorial, representado en la figura por $\vec{d}_T = \vec{d}_1 + \vec{d}_2$.

Ejemplo Ilustrativo 3-2. La figura de la izquierda muestra dos fuerzas $(F_1 = 200\text{ N}, F_2 = 100\text{ N}, \theta = 60^0)$ cuya suma se requiere conocer.



Solución. En la figura de la derecha se ha desplazado la fuerza F_2 y completado el triángulo con la resultante $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$; en este triángulo podemos aplicar la ley de los cosenos para obtener: $F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\theta'$ y como $\theta' = \pi - \theta$ entonces $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ y la fuerza F puede ser expresada como

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta} = \sqrt{(200)^2 + (100)^2 + 2(200)(100)\cos 60^0} \cong 173.2\,\text{N}$$

En el mismo triángulo, ahora podemos aplicar la ley de los senos para establecer la dirección de la resultante F con respecto a la fuerza F_1.

$$\frac{F}{\text{sen}120^0} = \frac{F_2}{\text{sen}\alpha} \Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{100}{173.2}\text{sen}120^0 \Rightarrow \alpha = 30^0$$

Ejemplo Ilustrativo 3.3. Los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ salen del punto O y son los lados de un triángulo. Se quiere saber el desplazamiento desde el vértice O hasta el punto medio del tercer lado.

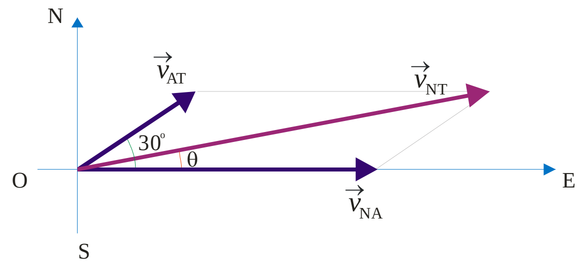
Solución. Consideremos que el tercer lado del triángulo es el vector $\vec{B} - \vec{A}$ (¿hay otra posibilidad?) y el desplazamiento desde O hasta el punto medio del tercer lado será:

$$\vec{D} = \vec{A} + \frac{1}{2}\left(\vec{B} - \vec{A}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{A} + \vec{B}\right)$$

También, podemos decir que $\vec{D} = \vec{B} - \frac{1}{2}\left(\vec{B} - \vec{A}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{A} + \vec{B}\right)$

Ejemplo Ilustrativo 3.4. Un avión viaja en la dirección Este con una velocidad de 480 km/h y entra a una región donde el viento sopla en la dirección de 30° Norte del Este con una velocidad de 160 km/h. Hallar la nueva magnitud y dirección de la velocidad de la nave.

Solución. Sea $\vec{v}_{NA}$ la velocidad del avión con respecto al aire; $\vec{v}_{AT}$ la velocidad del aire con respecto a tierra y $\vec{v}_{NT}$ la velocidad de la nave con respecto a tierra. La figura muestra el diagrama de velocidades:



La nueva velocidad de la nave será $\vec{v}_{NT} = \vec{v}_{NA} + \vec{v}_{AT}$; su magnitud la podemos determinar aplicando el teorema de los cosenos

$$v = \sqrt{v_{NA}^2 + v_{AT}^2 + 2v_{NA}v_{AT}\cos 30} = \sqrt{(480)^2 + (160)^2 + 2(480)(160)(0.866)} = 623.7 \text{ km}$$

La dirección la hallamos aplicando el teorema de los senos:

$\dfrac{623.7}{\operatorname{sen}150^\circ} = \dfrac{160}{\operatorname{sen}\theta}$; de donde encontramos que $\theta = 7.37^0$

4.- Producto Escalar y Producto Vectorial de dos vectores.

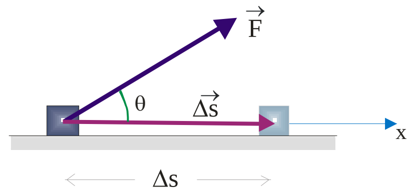
El producto escalar o producto punto de dos vectores, $\vec{A}$ y $\vec{B}$, se define como un escalar igual al producto de las magnitudes de los dos vectores por el coseno del ángulo que forman entre sí los dos vectores. Su notación es

$$\vec{A}\bullet\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta \qquad (4\text{-}1)$$

De esta definición observamos que sí el ángulo entre los dos vectores es 90^0, el producto escalar $\vec{A}\bullet\vec{B} = 0$ y esta es la condición de perpendicularidad de los dos vectores.

El producto escalar es conmutativo: $\vec{A}\bullet\vec{B} = \vec{B}\bullet\vec{A}$ y también distributivo: $\vec{A}\bullet\left(\vec{B}+\vec{C}\right) = \vec{A}\bullet\vec{B} + \vec{A}\bullet\vec{C}$.

Ejemplo Ilustrativo 4-1. El trabajo realizado por una fuerza es el ejemplo más sencillo de un producto escalar de dos vectores. Cuando una fuerza constante $\vec{F}$, aplicada a un objeto, desplaza al objeto una distancia $\Delta\vec{S}$, se dice que la fuerza realizó un trabajo definido como el producto del desplazamiento por la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento:



$$Trabajo \equiv W = \left|\Delta\vec{S}\right|\left|\vec{F}\right|\cos\theta = \vec{F}\bullet\left(\Delta\vec{S}\right)$$

Sí la fuerza no es constante durante el desplazamiento $\Delta\vec{S}$ se debe tomar un desplazamiento infinitesimal y luego sumar las contribuciones infinitesimales:

$$W = \int dW = \int \vec{F}\bullet d\vec{S}$$

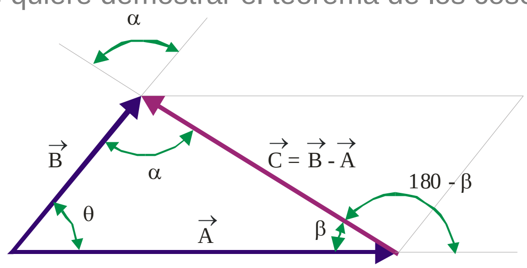
Cuál es el trabajo realizado a) cuando una fuerza de 10 newtons, que forma un ángulo de 60^0 con respecto al desplazamiento, mueve un cuerpo 5 metros y b) cuando el desplazamiento es de 6 metros en la dirección x, la magnitud de la fuerza es $\left|\vec{F}\right| = F(x) = 4x$ (newtons) y forma un ángulo con la dirección del desplazamiento de 60^0.

Solución.

a) El trabajo realizado por la fuerza será $W = (F\cos\theta)(\Delta S) = 25$ julios (1 newton x 1 metro = 1 julio);

b) El trabajo realizado por la fuerza será $W = \int dW = \int_{x=0}^{x=6}(4x)(0.5)dx = 36 \text{ julios}$.

Ejemplo Ilustrativo 4-2. La figura muestra un triángulo de lados $\left|\vec{A}\right|, \left|\vec{B}\right| \ y \left|\vec{C}\right| = \left|\vec{B}-\vec{A}\right|$. El ángulo entre los lados A y B es θ. Se quiere demostrar el teorema de los cosenos.



Solución. De acuerdo con la figura, el lado $\vec{C} = \vec{B} - \vec{A}$, podemos escribir el siguiente producto escalar como:

$$\vec{C}\bullet\vec{C} = \left(\vec{B}-\vec{A}\right)\bullet\left(\vec{B}-\vec{A}\right) = \vec{B}\bullet\vec{B} - \vec{B}\bullet\vec{A} - \vec{A}\bullet\vec{B} + \vec{A}\bullet\vec{A}$$

Aplicando las definiciones del producto escalar y teniendo en cuenta que el producto punto es conmutativo, entonces:

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$$

Ejemplo Ilustrativo 4.3. La potencia se puede definir como la tasa con respecto al tiempo a la cual una fuerza realiza trabajo sobre un objeto; como el trabajo realizado sobre un cuerpo contribuye al incremento de energía del cuerpo, también se puede afirmar que la potencia es la tasa con respecto al tiempo de transferencia de energía:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \bullet d\vec{S}}{dt} = \vec{F} \bullet \frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{F} \bullet \vec{v}$$

La unidad de potencia es el vatio (1 vatio = 1 julio/segundo).

Consideremos un elevador que tiene una masa de 800 kg y transporta una carga máxima de 600 kg. Una fuerza de fricción constante de 2000 newtons retarda el movimiento del elevador. ¿Cuál debe ser la mínima potencia suministrada por el motor que levanta el elevador con una velocidad constante de 4 m/s?

Solución. Sea $\vec{T}$ la tensión suministrada por el motor para levantar el elevador, $\vec{f}$ la fuerza de fricción y $M\vec{g}$ el peso total. De acuerdo con la segunda Ley de Newton, la fuerza neta que actúa sobre el elevador ($\vec{T} - \vec{f} - M\vec{g}$) es igual a la masa por la aceleración, pero la aceleración es cero porque la velocidad es constante, por tanto: $\vec{T} - \vec{f} - M\vec{g} = 0$, y

$$T = f + Mg = 2000 \text{ N} + (1400 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) = 15720 \text{ N}$$

Como la tensión y la velocidad son paralelas, la potencia suministrada por el motor será:

$$P = \vec{T} \bullet \vec{v} = Tv = (15720 \text{ N})(4 \text{ m/s}) = 62880 \text{ W} = 62.88 \text{ kW}$$

El producto vectorial ó producto cruz de dos vectores, $\vec{A}$ y $\vec{B}$, es un vector perpendicular al plano formado por los dos vectores y cuya magnitud es igual al producto de sus magnitudes multiplicado por el seno del ángulo que forman entre sí los dos vectores y cuyo sentido se determina por la regla de la mano derecha (sí el con el índice indicamos la dirección del primer vector y con el dedo del corazón la dirección del segundo vector, el pulgar nos dará la dirección del producto vectorial). Sí llamamos $\vec{C}$ al producto vectorial de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, la notación del producto cruz es

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \qquad (4\text{-}2).$$

La figura 5 ilustra el producto vectorial de los dos vectores

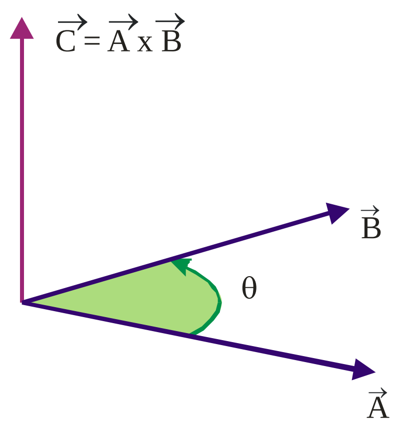


Fig. 5. Producto vectorial de dos vectores.

donde la magnitud del vector $\vec{C}$ es

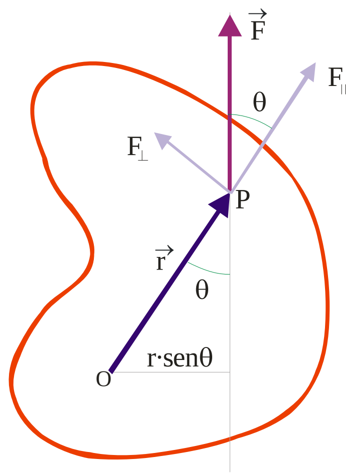
$$\left|\vec{C}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\operatorname{sen}\theta \tag{4-3}$$

Geométricamente, el producto cruz representa el área del paralelogramo formado por los dos vectores. El producto cruz es distributivo, esto es $\vec{A}\times\left(\vec{B}+\vec{D}\right)=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{D}$.

Además, se debe observar que el producto cruz no es conmutativo, esto es, $\vec{A}\times\vec{B}\neq\vec{B}\times\vec{A}$. La regla de la mano derecha nos indica claramente que $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$.

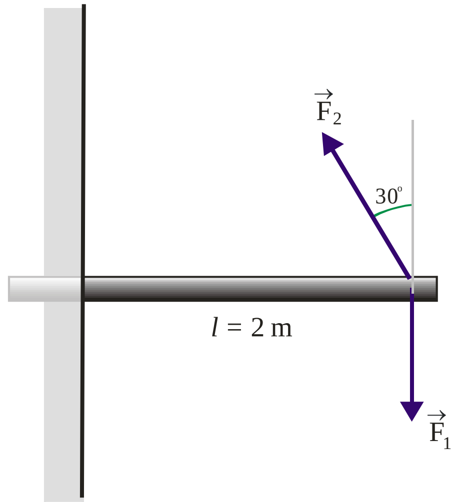
Ejemplo Ilustrativo 4-4. Una aplicación importante en física del producto vectorial de dos vectores es el **Torque ó Momento de una Fuerza** que mide la efectividad de la fuerza para causar o alterar el movimiento de rotación de un cuerpo; la magnitud y dirección de la fuerza son importantes, pero también lo es el punto de aplicación. El torque con respecto a un eje de rotación se define como el producto de la fuerza por la distancia perpendicular entre su línea de aplicación y el eje de rotación (conocida también como brazo de momento o brazo de palanca).

La figura muestra una fuerza $\vec{F}$ aplicada al cuerpo en el punto P, un eje de rotación perpendicular al plano en el punto O y el vector de posición $\vec{r}$ del punto P con respecto a O. La fuerza tiende a causar rotación antihoraria y la magnitud de su torque es $\tau=\left(r\operatorname{sen}\theta\right)\left(F\right)$, lo cual puede escribirse en forma vectorial como $\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}$.



En la figura, al considerar las componentes perpendicular $\left(F\operatorname{sen}\theta\right)$ y paralela $\left(F\cos\theta\right)$ a $\vec{r}$, observamos que la magnitud del torque de la fuerza $\vec{F}$, corresponde al torque de la componente perpendicular: $\tau=\left(F\operatorname{sen}\theta\right)\left(r\right)$ porque el torque de la componente paralela es nulo debido a que su brazo de momento es cero. La unidad del torque en el sistema internacional es newton-metro.

Ejemplo Ilustrativo 4-5. Como ejemplo numérico, consideremos que al extremo libre de la barra de longitud 2 metros, mostrada en la figura se aplican dos fuerzas $\vec{F}_1$ (magnitud 100 N) y $\vec{F}_2$ (magnitud 150 N). Se quiere hallar el momento de cada una de estas fuerzas y el momento total con respecto al punto de empotramiento de la barra.



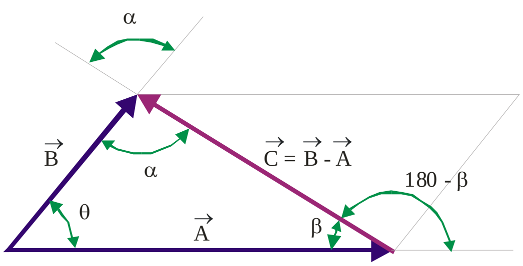
Solución.

El momento ejercido por la fuerza $\vec{F}_1$ es $\tau_1 = F_1 l = (100\,\mathrm{N})(2\,\mathrm{m}) = 200\,\mathrm{N\cdot m}$ en sentido horario.

El momento de la fuerza $\vec{F}_2$ es $\tau_2 = (F_2 \mathrm{sen} 120^0)(2\,\mathrm{m}) \cong 259.81\,\mathrm{N\cdot m}$ en sentido anti-horario; así:

El momento total resultante es $\tau = \tau_2 - \tau_1 = 59.81\,\mathrm{N\cdot m}$ en el sentido anti-horario.

Ejemplo Ilustrativo 4.6. Consideremos nuevamente la figura del ejemplo 4-2 y demostremos el teorema de los senos.



Solución. Tomando ahora el producto vectorial $\vec{C} \times \vec{C}$, tenemos que:

$$0 = \vec{C} \times \vec{C} = \vec{C} \times (\vec{B} - \vec{A}) = C \times \vec{B} - \vec{C} \times \vec{A} \qquad \text{ó} \qquad \vec{C} \times \vec{B} = \vec{C} \times \vec{A}$$

resultado que también puede escribirse como

$$|\vec{C}||\vec{B}| \mathrm{sen}\alpha = |\vec{C}||\vec{A}| \mathrm{sen}(180 - \beta) = |\vec{C}||\vec{A}| \mathrm{sen}\beta$$

de donde tenemos que $\dfrac{|\vec{A}|}{\mathrm{sen}\alpha} = \dfrac{|\vec{B}|}{\mathrm{sen}\beta}$, similarmente, $\dfrac{|\vec{A}|}{\mathrm{sen}\alpha} = \dfrac{|\vec{C}|}{\mathrm{sen}\theta}$ y combinando estos dos resultados obtenemos:

$$\frac{A}{\mathrm{sen}\alpha} = \frac{B}{\mathrm{sen}\beta} = \frac{C}{\mathrm{sen}\theta}$$

5.- Producto de tres vectores.

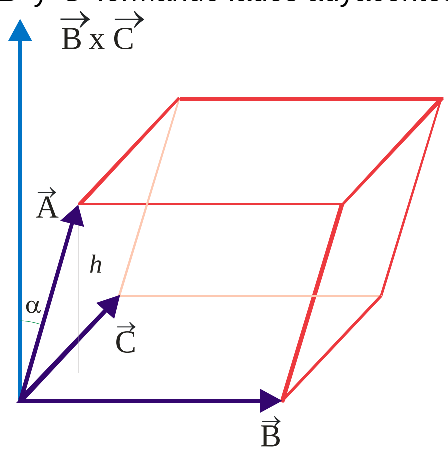
Tres vectores pueden ser multiplicados en tres maneras diferentes. En primer lugar consideremos el ordenamiento $\vec{A}\left(\vec{B}\bullet\vec{C}\right)$. Esto no es otra cosa que el producto de un escalar $\left(\vec{B}\bullet\vec{C}\right)$ por el vector $\vec{A}$. Un segundo ordenamiento es el conocido como **triple producto escalar**:

$$\vec{A}\bullet\vec{B}\times\vec{C} \tag{5-1}$$

El producto vectorial $\vec{B}\times\vec{C}$, necesariamente debe formarse antes de tomar el producto escalar para que el resultado sea un escalar. Los vectores del triple producto escalar pueden ser objeto de permutaciones; sí el número de permutaciones es impar el producto cambia solamente de signo y sí el número total de permutaciones es par el valor del producto queda igual:

$$\vec{A}\bullet\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{B}\bullet\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)=\vec{C}\bullet\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=-\vec{C}\left(\vec{B}\times\vec{A}\right)=-\vec{A}\bullet\left(\vec{C}\times\vec{B}\right)=-\vec{B}\bullet\left(\vec{A}\times\vec{C}\right) \tag{5-2}$$

El triple producto escalar tiene una interpretación geométrica simple: representa el volumen del paralelepípedo con vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ formando lados adyacentes, como se indica en la figura.



Como $\left|\vec{B}\times\vec{C}\right|$ representa el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, y $h=\left|\vec{A}\right|\cos\alpha$ es la altura del paralelepípedo, entonces volumen del paralelepípedo con vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ formando lados adyacentes es

$$\vec{A}\bullet\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\times\vec{C}\right|\cos\alpha \tag{5-3}$$

Cuando los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ son coplanares, el volumen es cero porque $\alpha=\pi/2$. Por otra parte, sí los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ son vectores de posición, entonces, los puntos de posición que ellos representan están en un mismo plano.

El tercer ordenamiento corresponde al **triple producto vectorial** $\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$ en el cual el paréntesis indica que este producto debe ser el primero en tomar porque el resultado depende del orden que se tome; este producto no sigue la ley asociativa y $\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$ es diferente a $\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C}$. Una identidad importante (cuya demostración se deja como ejercicio) es $\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{B}\left(\vec{A}\bullet\vec{C}\right)-\vec{C}\left(\vec{A}\bullet\vec{B}\right)$.

6.- Marco de referencia, sistema cartesiano de referencia.

Un evento físico como el movimiento de un carro o la variación de temperatura de un cuerpo tiene lugar en alguna región del espacio y ocurre en algún momento particular del tiempo.

Un marco de referencia es un conjunto de objetos inmóviles que sirven de referentes para localizar un sitio predeterminado. Ejemplo: "siga derecho hasta la Iglesia, cruce luego a la izquierda, avance hasta el Teatro y 200 m adelante encontrará el taller;" la Iglesia y el Teatro constituyen el marco de referencia en este ejemplo.

La vivencia nos dice que **vivimos** en un espacio de tres dimensiones; en cualquier parte que nos situemos siempre podremos hablar de tres direcciones ortogonales entre sí: $frente \Leftrightarrow atrás$, $izquierda \Leftrightarrow derecha$ y $arriba \Leftrightarrow abajo$.

La selección de un marco de referencia es el primer paso en la descripción del espacio abstracto; los objetos fijos definidos en el marco de referencia como son el Teatro y la Iglesia en nuestro ejemplo dan las posiciones de referencia. Rene Descartes a comienzos del siglo XVII propuso el sistema cartesiano de coordenadas; constituido por tres ejes perpendiculares entre sí, escalados y extendidos sin límite para formar así un red ó grilla que llenara todo el espacio y en donde la posición de cualquier punto por los tres valores de las coordenadas. La posición del punto P_1 está definida por los valores $(x_1, y_{1,}, z_1)$, como se ilustra en la figura 6a

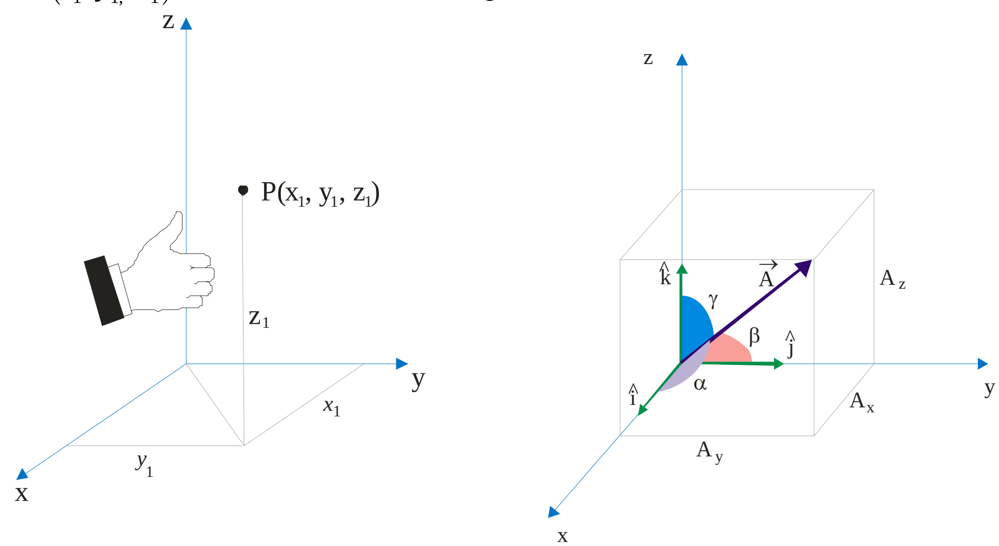


Fig. 6. Sistema cartesiano de coordenadas.

El sistema de coordenadas escogido es el llamado sistema de mano derecha ó matemáticamente positivo que resulta cuando orientamos el pulgar de la mano derecha en la dirección de z-positivo y los demás dedos están a 90 grados en rotación que tiende a llevar el eje-x positivo a coincidir con el eje-y positivo.

El modelo cartesiano expresa la uniformidad del espacio; el espacio descrito en este modelo no contiene centros o direcciones privilegiadas. En la Física clásica (Física Newtoniana) el espacio es uniforme y no es afectado por objetos en movimiento. En cuanto al tiempo, Newton lo definió como absoluto; el tiempo transcurre igualmente para todos los observadores, independiente de sus marcos de referencia. Aquí no trataremos el concepto de tiempo, solo anotaremos que es posible adicionar un reloj sincronizado a cada posición espacial tal que si un evento ocurre este puede ser descrito por las tres coordenadas espaciales que nos dirán donde ocurrió y un cuarto valor correspondiente a cuando este tuvo lugar. Los eventos ocurren en lugares y tiempos específicos que son aspectos importantes en física.

Como se ilustró en la figura 6a, un punto P en el espacio, en coordenadas cartesianas puede representarse por (x, y, z) y el vector que va desde el origen al punto P se denomina **vector de posición del punto P:**

$$\vec{r}_P = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Ejemplo Ilustrativo 6-1. Las coordenadas de los puntos A y B son, respectivamente, (1,-1,1) y (-1,1,1). Hallar sus vectores de posición y la magnitud de la suma de esos dos vectores.

Solución. Los vectores de posición son $\vec{A} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$; $\vec{B} = -\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$. El vector suma es $\vec{A} + \vec{B} = 2\hat{k}$, por tanto, su magnitud es 2.

Ejemplo Ilustrativo 6-2. Considere que la arista del cubo de la figura 6b es la unidad. Hallar el vector de posición del punto A y el ángulo que ese vector forma con el eje-x.

Solución. Como las coordenadas de A son (1,1,1), el vector de posición es $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$; su magnitud es $\left|\vec{A}\right| = \sqrt{3}$ y $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$; por tanto $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cong 54.74^0$.

Ejemplo Ilustrativo 6.3. Los vértices A, B y C del paralelepípedo mostrado en la figura del numeral 5 (pág. 10) corresponden a los puntos A(-1,1,3), B(0,6,0) y C(-4,0,0). Hallar (a) Los vectores de posición de esos puntos; (b) el área de la base del paralelepípedo; y (c) el volumen del paralelepípedo.

Solución.

a)- Los vectores de posición son $\vec{A} = -\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$; $\vec{B} = -4\hat{i}$; $\vec{C} = 6\hat{j}$

b)- El área de la base está dada por el producto vectorial $\vec{B} \times \vec{C} = 24\hat{k}$

c)- El volumen del paralelepípedo lo da el triple producto escalar $\vec{A} \bullet \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = 72$

7.- Vector Proyección.

En la siguiente figura se muestra un vector $\vec{A}$ que forma un ángulo θ con una dirección arbitraria especificada por el vector unitario $\hat{e}$. Se define como vector proyección de $\vec{A}$ en la dirección $\hat{e}$ al vector cuya magnitud es la componente escalar de A en dicha dirección, $\vec{A} \bullet \hat{e} = A\cos\theta$, y que está orientado en la dirección de $\hat{e}$.

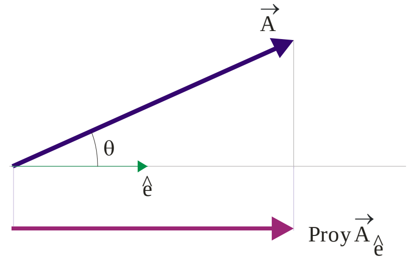


Fig. 7. Vector proyección.

Así, escribimos $\quad \text{Pr}\,oy\vec{A}_{\hat{e}} = \left(\vec{A} \bullet \hat{e}\right)\hat{e} = \left(A\cos\theta\right)\hat{e}$

Ejemplo Ilustrativo 7.1. Dados los vectores $\vec{A} = 8\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ y $\vec{B} = 3\hat{i} + \hat{j}$. Hallar las componentes vectoriales de $\vec{A}$ paralela y perpendicular al vector $\vec{B}$.

Solución. Llamemos $\vec{A}_1$ a la componente de $\vec{A}$ paralela a $\vec{B}$ y $\vec{A}_2$ a la componente de $\vec{A}$ perpendicular a $\vec{B}$.

$$\vec{A}_1 = \mathrm{Pr}\,oy\vec{A}_{\hat{B}} = \left(\vec{A} \bullet \hat{B}\right)\hat{B} = \left[\left(8\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}\right) \bullet \left(\frac{3\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{10}}\right)\right] \frac{3\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{10}} = 6.3\hat{i} + 2.1\hat{j}$$

$$\vec{A}_2 = \vec{A} - \vec{A}_1 = \left(8\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}\right) - \left(6.3\hat{i} + 2.1\hat{j}\right) = 1.7\hat{i} - 5.1\hat{j} + 2\hat{k}$$

Ejemplo Ilustrativo 7.2. Los vértices de un triángulo son los puntos $A(1,-2,0); B(1,0,2); C(0,-2,3)$. Hallar (a) los vectores de posición de los vértices; y (b) el perímetro del triángulo.

Solución.

a) Los vectores de posición de los vértices son $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j}$; $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{k}$; $\vec{C} = -2\hat{j} + 3\hat{k}$

b) Llamemos $\vec{D}$ al vector que va desde el punto A hasta el punto B: $\vec{D} = \vec{B} - \vec{A} = 2\hat{j} + 2\hat{k}$; $\vec{E}$ al vector que va desde el punto B hasta el punto C: $\vec{E} = \vec{C} - \vec{B} = -\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, y $\vec{F}$ al vector que va desde el punto C al punto A: $\vec{F} = \vec{A} - \vec{C} = \hat{i} - 3\hat{k}$.

El perímetro del triángulo será: $\left|\vec{D}\right| + \left|\vec{E}\right| + \left|\vec{F}\right| = 2\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{10} \cong 8.44$